الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2024
- الموضوع -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSSS | NS 22F

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵜⵙⴳⵎⵉ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ
ⴷ ⵜⵙⴳⵎⵉ ⵜⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓⵜ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

| | | | |
|---|---|---|---|
| المادة | الرياضيات | مدة الإنجاز | 3h |
| الشعبة المسلك | مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية) | المعامل | 7 |

## INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

## COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

| | | |
|---|---|---|
| Exercice 1 | Suites numériques | 3 points |
| Exercice 2 | Géométrie dans l'espace | 3 points |
| Exercice 3 | Nombres complexes | 4 points |
| Exercice 4 | Calcul des probabilités | 2 points |
| Problème | Etude de fonctions numériques et calcul intégral | 8 points |

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$ et par $|z|$ son module
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien

## Exercice 1 (3 points) :

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{1+u_n}$ , pour tout entier naturel $n$

0.25 1) a) Vérifier que $u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1+u_n}$, pour tout entier naturel $n$

0.5 b) Montrer par récurrence que $2 \le u_n \le 4$, pour tout entier naturel $n$

0.25 2) a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2-u_n)}{1+u_n}$, pour tout entier naturel $n$

0.5 b) Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et en déduire que $(u_n)$ est convergente.

3) Soit $(v_n)$ la suite numérique définie par $v_n = \dfrac{2-u_n}{1-u_n}$ , pour tout entier naturel $n$

0.5 a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$

0.5 b) Montrer que $u_n = 1 + \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}$ , pour tout entier naturel $n$

0.5 c) Calculer la limite de la suite $(u_n)$

## Exercice 2 (3 points) :

Dans l’espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1, 0, -1)$ et $B(1, 2, -1)$ , le plan $(P)$ passant par $A$ et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère $(S)$ de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon $5$

0.25 1) Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan $(P)$

0.25 2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère $(S)$

0.5 3) a) Vérifier que la distance du point $\Omega$ au plan $(P)$ est $d(\Omega,(P)) = 3$

0.5 b) En déduire que le plan $(P)$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle $(\Gamma)$ de rayon à déterminer.

0.5 4) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$ passant par $\Omega$ et perpendiculaire au plan $(P)$

0.5 b) Montrer que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle $(\Gamma)$

0.5 c) Montrer que la droite $(\Delta)$ est une médiatrice du segment $[AB]$

## Exercice 3 (4 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a=\sqrt{3}\left(1-i\right)$ et $b=2+\sqrt{3}+i$

0.5 1) Vérifier que $|a|=\sqrt{6}$ et que $\arg(a)\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$

0.75 2) a) Montrer que $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$ puis vérifier que $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.75 b) En déduire une forme trigonométrique du complexe $b$ puis vérifier que $b^{24}$ est un nombre réel.

3) Soit $R$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$ , qui transforme chaque point $M$ du plan d'affixe $z$ en un point $M'$ d'affixe $z'$. On pose $R\left(B\right)=B'$, $R\left(A\right)=A'$ et $R\left(A'\right)=A''$

0.5 a) Vérifier que $z'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)z$ et que $\arg(a')\equiv\frac{-\pi}{12}[2\pi]$ où $a'$ est l'affixe du point $A'$

0.5 b) Montrer que l'affixe du point $A''$ est $a''=\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points $O$, $A''$ et $B$ sont alignés.

0.5 c) Montrer que $b'$, l'affixe du point $B'$ , vérifie $b'=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\overline{a}$

0.5 d) En déduire que le triangle $OAB'$ est rectangle en $O$

## Exercice 4 (2 points) :

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

0.5 1) Montrer que $p(A)=\frac{1}{3}$ **,** où $A$ est l'évènement « les deux boules tirées portent le même numéro »

0.5 2) Montrer que $p(B)=\frac{5}{21}$ , où $B$ est l'évènement « La somme des numéros des boules tirées est 4 »

0.5 3) Calculer $p\left(A\cap B\right)$

0.5 4) Les événements $A$ et $B$ sont -ils indépendants ? Justifier.

## Problème (8 points) :

**Partie I :** On considère les deux fonctions $u$ et $v$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=e^x$ et $v(x)=x$

0.5 1) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes $(\mathcal{C}_u)$ et $(\mathcal{C}_v)$ des fonctions $u$ et $v$

0.25 2) Justifier graphiquement que $e^x-x>0$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$

0.5 3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_u)$, la courbe $(\mathcal{C}_v)$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

**Partie II :** On considère la fonction numérique $f$ définie par $f(x)=x+1-\ln(e^x-x)$.

0.25 1) a) Vérifier que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$

0.5 b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ , $f(x)=1-\ln(1-xe^{-x})$

0.5 c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

0.25 2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0.5 b) Vérifier que pour tout $x<0$, $f(x)=x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\dfrac{1}{xe^{-x}}\right)$

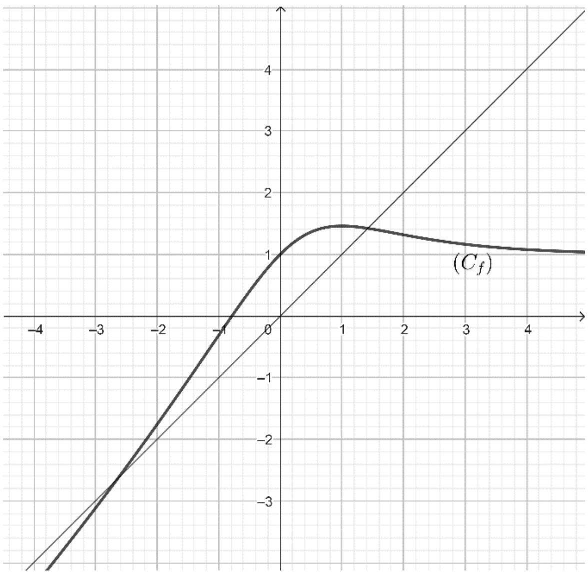
0.75 c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$

0.5 3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x-x}$

0.5 b) Etudier le signe de la fonction dérivée de $f$ , puis déduire le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$

0.75 c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1,0[$

4) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé.




0.5 a) Justifier graphiquement que l'équation $f(x)=x$ admet deux solutions $\alpha$ et $\beta$ .

0.5 b) Montrer que : $e^{\alpha}-e^{\beta}=\alpha-\beta$

5) Soit $g$ la restriction de la fonction $f$ sur l'intervalle $I=]-\infty,1]$

0.5 a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)

0.75 b) Vérifier que $g^{-1}$ est dérivable en 1 et calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$