



**EXERCICE1** : (10 points)**Partie I**

Pour tout entier naturel **non nul**  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $I = [0, +\infty[$

par :  $f_n(0) = 0$  et  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n$

et soit  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.5 1-a) Vérifier que :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; \sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n \left( x^{\frac{1}{2n}} \ln \left( x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n$ , en déduire que

$f_n$  est continue à droite en 0

0.25 b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

0.75 c) Vérifier que :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; \frac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \left( \frac{\ln \left( x^{\frac{1}{2n}} \right)}{x^{\frac{1}{2n}}} \right)^n$ , en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 d) Calculer, suivant la parité de  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x)}{x}$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.75 2-a) Montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que :

$$(\forall x \in ]0, +\infty[) ; f'_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1} (2n + \ln x)$$

0.25 b) Vérifier que :  $\forall n \geq 2$ ,  $f'_n(x) = 0$  si et seulement si  $(x = 1$  ou  $x = e^{-2n})$

1 c) Étudier, suivant la parité de  $n$ , le sens de variation de  $f_n$  et donner son tableau de variations.

0.25 d) Montrer que si  $n$  est impair et  $n \geq 3$  alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de  $(C_n)$

**Partie II :**

1- Soit  $\beta \in ]1, e[$  un réel fixé. On considère la suite numérique  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = f_n(\beta)$$

0.25 a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < u_n < \sqrt{e}$

0.25 b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante.

0.25 c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier  $n$  non nul, il existe un unique réel  $x_n \in ]1; e[$  tel que :  $f_n(x_n) = 1$

0.75 b) Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ainsi définie est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

3- On pose :  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

0.5 a) Montrer que :  $1 < \ell \leq e$

0.25 b) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{\ell}}$

0.25 c) Montrer que si  $\ell < e$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(\ln x_n) = -\infty$

0.25 d) En déduire la valeur de  $\ell$

### Partie III :

On pose pour tout  $x \in I$ ,  $F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2 dt$

0.25 1-a) Montrer que la fonction  $F$  est continue sur  $I$

1 b) En utilisant une double intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in ]0, +\infty[); F(x) = -\frac{x^2}{2} \ln^2(x) + \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{4}(1-x^2)$$

0.5 2-a) Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$

0.25 b) En déduire la valeur de  $F(0)$

0.5 c) Calculer, en  $\text{cm}^3$ , le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe  $(C_1)$  relative à l'intervalle  $[0,1]$ . (On prendra  $\|i\| = 1 \text{cm}$ )

### EXERCICE2 : ( 3.5 points)

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.

#### PARTIE I :

On considère dans  $\mathbb{C}_+^2$  le système suivant : (S) : 
$$\begin{cases} \sqrt{x} \left( 1 + \frac{1}{x+y} \right) = \frac{12}{5} \\ \sqrt{y} \left( 1 - \frac{1}{x+y} \right) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

1- Soit  $(x, y) \in \mathbb{C}_+^2$  une solution du système (S). On pose :  $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$

0.25 a) Montrer que :  $z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$

0.75 b) Montrer que :  $z^2 - \left( \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i \right) z + 1 = 0$ , en déduire les valeurs possibles de  $z$

$$\left( \text{On remarque que : } \frac{28}{25} + \frac{96}{25}i = \left( \frac{2}{5}(4+3i) \right)^2 \right)$$

0.25 c) En déduire les valeurs du couple  $(x, y)$

0.5 2- Résoudre dans  $\mathbb{C}_+^2$  le système (S)

**PARTIE II :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Soit  $(U)$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 et  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $C(c)$  trois points du cercle  $(U)$  deux à deux distincts.

0.25 1- Montrer que :  $(\forall z \in \mathbb{C}) ; |z|=1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

0.5 2-a) La droite passant par  $A$  et parallèle à  $(BC)$  coupe le cercle  $(U)$  au point  $P(p)$

Montrer que :  $p = \frac{bc}{a}$

0.5 b) La droite passant par  $A$  et perpendiculaire à  $(BC)$  coupe le cercle  $(U)$  au point  $Q(q)$ . Montrer que :  $q = -p$

0.5 c) La droite passant par  $C$  et parallèle à  $(AB)$  coupe le cercle  $(U)$  au point  $R(r)$   
Montrer que les deux droites  $(PR)$  et  $(OB)$  sont perpendiculaires.

**EXERCICE3** : (3.5 points)

On rappelle que  $(M_3(\mathbb{C}), +, \times)$  est un anneau unitaire et non commutatif d'unité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Soit } E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$$

0.25 1- Montrer que  $E$  est un sous-groupe de  $(M_3(\mathbb{C}), +)$

2- On munit l'ensemble  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  de la loi de composition interne  $*$  définie par :

$$\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^2 ; (x, z) * (x', z') = (x + x', z + z')$$

et on considère l'application  $\varphi$  définie de  $E$  vers  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  par :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3, \varphi(M(a, b, c)) = (a, b + ci)$$

0.5 a) Montrer que  $\varphi$  est un homomorphisme de  $(E, +)$  vers  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, *)$  et que

$$\varphi(E) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

0.25 b) En déduire que  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, *)$  est un groupe commutatif.

3- On munit  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  de la loi de composition interne  $T$  définie par :

$$\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^2 ; (x, z) T (x', z') = (x \operatorname{Re}(z') + x' \operatorname{Re}(z), zz')$$

( $\operatorname{Re}(z)$  désigne la partie réelle du nombre complexe  $z$ )

0.25 a) Montrer que  $T$  est commutative.

0.25 b) Vérifier que  $(0, 1)$  est l'élément neutre de  $T$  dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

0.5 c) Vérifier que  $\forall x \in \mathbb{C}, (1, i) T (x, -i) = (0, 1)$  ; en déduire que  $T$  est non associative dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

4- Soit  $G = \{(\operatorname{Im}(z), z) / z \in \mathbb{C}\}$

( $\operatorname{Im}(z)$  désigne la partie imaginaire du nombre complexe  $z$ )

- 0.25 a) Montrer que  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, *)$   
 (On remarque que  $(-\operatorname{Im}(z), -z)$  est le symétrique de  $(\operatorname{Im}(z), z)$  pour la loi  $*$  )
- 0.25 b) Soit  $\psi$  l'application définie de  $\mathbb{C}^*$  vers  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  par :  $\forall z \in \mathbb{C}^* ; \psi(z) = (\operatorname{Im}(z), z)$   
 Montrer que  $\psi$  est un homomorphisme de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  vers  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, T)$
- 0.5 c) En déduire que  $(G - \{(0,0)\}, T)$  est un groupe commutatif.
- 0.5 5- Montrer que  $(G, *, T)$  est un corps commutatif.

**EXERCICE4**: (3 points)

Soit  $p$  un nombre premier impair. On pose :  $S = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^{p-1}$

Soit  $q$  un nombre premier qui divise  $S$ .

- 0.5 1- a) Montrer que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.
- 0.25 b) En déduire que :  $p^{q-1} \equiv 1 [q]$
- 0.5 c) Vérifier que :  $p^p - 1 = (p-1)S$ , en déduire que :  $p^p \equiv 1 [q]$
- 2- On suppose que  $p$  et  $q-1$  sont premiers entre eux.
- 0.75 a) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que :  $p \equiv 1 [q]$
- 0.25 b) En déduire que  $S \equiv 1 [q]$
- 0.75 3- Montrer que :  $q \equiv 1 [p]$

