الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2023

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS | الموضوع | NS 25

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ……….………..…(7.75 pts)

- L'EXERCICE2 se rapporte à l'analyse ……….………..…(2.25 pts)

- L'EXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes........…(3.5 pts)

- L'EXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique ………….......(3 pts)

- L'EXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques......(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 :(7.75 points)

Partie I

0.5 1- a) Montrer que : $\forall t \in [0,+\infty[\ ;\ \frac{4}{(2+t)^2} \le \frac{1}{1+t} \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$

0.5 b) En déduire que : $\forall x \in [0,+\infty[\ ;\ \frac{2x}{2+x} \le ln(1+x) \le \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$

2- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{ln(1+x)}{x}$$

0.5 Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g(x)-1}{x} = \frac{-1}{2}$

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=1 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[\ ;\ f(x) = g(x)e^{-x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2- a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ \frac{f(x)-1}{x} = \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x) + \left(\frac{g(x)-1}{x}\right)$

0.5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

0.75 3- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis que :

$$\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ f'(x) = \frac{x-(1+x)^2 ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$$

0.5 4- a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ -\frac{3}{2} < \frac{x-(1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

0.25 b) En déduire que : $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

0.25 5- a) Dresser le tableau de variations de f

0.75 b) Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (On prendra $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$)

Partie III

0.5 1- Montrer que l'équation d'inconnue x : $f(x)=3x$, admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$

2- Soient $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = \beta \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} = \frac{1}{3} f(u_n)$$

0.5 a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n \geq 0$

0.5 b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0.5 c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$

0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

EXERCICE2 : (2.25 points)

On considère la fonction numérique : $x \mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0;1;...;n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n}\ ;\ e^{\frac{k}{n}}\right)$

0.5 1- a) Montrer que : $\forall k \in \{0;1;...;(n-1)\}\ \exists c_k \in \left]\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}e^{c_k}$

0.25 b) Montrer que : $\forall k \in \{0;1;...;(n-1)\}\ ;\quad M_kM_{k+1} = \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$

(M_kM_{k+1} désigne la distance de M_k à M_{k+1})

0.5 c) En déduire que : $\forall k \in \{0;1;...;(n-1)\}\ ;\quad \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_kM_{k+1} \leq \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2- Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_kM_{k+1}$

0.5 a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

0.5 b) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

EXERCICE3 :(3.5 points)

On considère le nombre complexe : $u = 1 + \left(2-\sqrt{3}\right)i$

0.5 1- a) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1-i$ et $1+\sqrt{3}i$

0.25 b) Montrer que : $\frac{(1-i)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

0.25 c) En déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

0.5 d) Montrer que : $u = (\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

2- On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1 \ , \quad y_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \left(2-\sqrt{3}\right) y_n \\ y_{n+1} = \left(2-\sqrt{3}\right) x_n + y_n \end{cases}$$

0.5 a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + iy_n = u^n$

0.5 b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \dfrac{\cos\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$ et $y_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$

3- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe u^n

0.5 a) Déterminer les entiers n pour lesquels les points O, A_0 et A_n sont alignés.

0.5 b) Montrer que pour tout entier n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

<u>EXERCICE4</u> :(3 points)

Soit p **un nombre premier impair**. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^2 \equiv 2 \ [p]$

0.25 1- a) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

0.25 b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$

(On remarque que : $(2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) = 2^{p-1} - 1$)

2- Soit x une solution de l'équation (E)

0.5 a) Montrer que p et x sont premiers entre eux.

0.5 b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ [p]$ (On pourra utiliser le théorème de Fermat)

0.25 3- Montrer que pour tout $k \in \{1,2,...,p-1\}$, p divise C_p^k

(On rappelle que : $\left(\forall k \in \{1,2,...,p-1\}\right)$ $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ et que : $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$)

0.25 4-a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i\, 2^{\frac{p}{2}} \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$

(i étant le nombre complexe tel que : $i^2 = -1$)

0.5 b) On admet que : $(1+i)^p = \sum\limits_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum\limits_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$

Montrer que : $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\dfrac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\dfrac{\pi}{4}\right) \equiv 1 \ [p]$ (on pourra utiliser la question3-)

0.5 5- En déduire que si $p \equiv 5 \ [8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

EXERCICE5 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif de zéro la matrice $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&y\\2y&x-y\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Partie I :

0.5 1- Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.25 2- Montrer que E est un sous- espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

0.25 3- a) Vérifier que : $\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$; $M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'+3yy',xy'+yx')$

0.5 b) En déduire que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0.25 4- a) Vérifier que : $M(\sqrt{3},1)\times M(-\sqrt{3},1)=O$

0.25 b) En déduire que $(E,+,\times)$ n'est pas un corps.

Partie II :

Soient $F=\left\{x+y\sqrt{3}\ /\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$ et $G=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&y\\2y&x-y\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

0.25 1- Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2$; $x+y\sqrt{3}=0$ si et seulement si ($x=0$ et $y=0$)

0.25 2- Montrer que $F-\{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$

3- Soit φ l'application définie de $F-\{0\}$ vers E par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2-\{(0,0)\}\ ;\ \varphi\left(x+y\sqrt{3}\right)=M(x,y)$$

0.25 a) Vérifier que : $\varphi\left(F-\{0\}\right)=G-\{O\}$

0.25 b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F-\{0\},\times)$ vers $(E,\times)$

0.25 c) En déduire que $(G-\{O\},\times)$ est un groupe commutatif.

0.25 4- Montrer que $(G,+,\times)$ est un corps commutatif.

FIN